Lezione 2 – macchine di Turing

Lezione del 09/03/2023

Definizione di Macchina di Turing

- La macchina di Turing che abbiamo visto informalmente durante la scorsa lezione utilizza 3 nastri: sui primi due nastri, prima che la macchina inizi ad operare, vengono scritti (dall'utente) i due numeri da sommare, sul terzo, inizialmente vuoto, la macchina scrive il risultato nel corso della sua computazione
- Dobbiamo, ora, formalizzare questi concetti e, allo scopo, cominciamo con il limitarci a considerare macchine di Turing che utilizzano un solo nastro
- La definizione 1.3 a pag. 9 della dispensa 1 presenta una macchina di Turing ad un nastro come:
  - una unità di controllo che, ad ogni istante, può trovarsi in uno stato interno appartenente ad un certo insieme Q che contiene, fra gli altri, lo stato particolare q_0 che fa partire la computazione e un sottoinsieme Q_F di stati che fanno terminare la computazione
  - un nastro suddiviso in un infinito numero di celle, ciascuna delle quali, ad ogni istante, può essere vuota o contenere un simbolo appartenente ad un alfabeto Σ, e sul quale nastro si muove una testina di lettura/scrittura
  - ad ogni istante, dipendentemente dallo stato interno e da ciò che è letto dalla testina, viene eseguita una quintupla scelta in un insieme P di quintuple

Definizione di Macchina di Turing

- E come funziona una macchina di Turing?
- All'inizio, quando l'unità di controllo si trova nello stato q_0: la testina legge il simbolo contenuto nella cella che sta scandendo e la macchina cerca una quintupla i cui primi due elementi sono q_0 e il simbolo letto dalla testina (che può anche essere il simbolo ***blank*** ▢) e, se trova una tale quintupla, la esegue
  - se non la trova ... non compie alcuna azione (ci torneremo più avanti) e la computazione termina
- *Eseguire una quintupla* significa eseguire le tre azioni in essa indicate:
  - sovrascrivere il simbolo nella cella scandita dalla testina con il simbolo indicato nella quintupla
  - cambiare (eventualmente) stato interno
    - eventualmente, ossia, a meno che nella quintupla non sia indicato di rimanere nel medesimo stato in cui ci si trovava prima della sua esecuzione
  - muovere (eventualmente) la testina
    - eventualmente, ossia a meno che nella quintupla sia indicato "ferma"
- Eseguita la prima quintupla, si cerca un'altra quintupla da eseguire (ossia, una quintupla i cui primi due elementi sono lo stato in cui si trova la macchina e il simbolo letto dalla testina) e così via, fino a quando nessuna quintupla può essere eseguita

Esempio di macchina di Turing

- Consideriamo una macchina di Turing ad un nastro, $T_{parità}$, definita sull'alfabeto

  $\Sigma = \{ 0, 1, p, d\}$ e sull'insieme di stati $Q = \{q_0 , q_p , q_d , q_F \}$

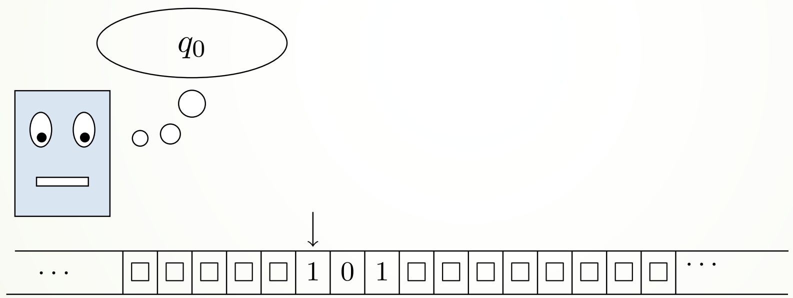
  con stato iniziale q_0 e stato finale q_F il cui insieme delle quintuple è

$$
\begin{aligned}
P = \{ \quad & \langle q_0 , 0, \square, q_p , \text{destra} \rangle , \; \langle q_0 , 1, \square, q_d , \text{destra} \rangle , \\
& \langle q_p , 0, \square, q_p , \text{destra} \rangle , \; \langle q_d , 0, \square, q_d , \text{destra} \rangle , \\
& \langle q_p , 1, \square, q_d , \text{destra} \rangle , \; \langle q_d , 1, \square, q_p , \text{destra} \rangle , \\
& \langle q_p , \square, p, q_F , \text{fermo} \rangle , \; \langle q_d , \square, d, q_F , \text{fermo} \rangle \; \}
\end{aligned}
$$

- La macchina $T_{parità}$ scandisce la sequenza di caratteri scritta sul suo nastro, cancellandoli via via che vengono scanditi, e verificando se tale sequenza contiene un numero pari o un numero dispari di '1': al termine della scansione, nel primo caso scrive 'p' e termina, nel secondo caso scrive 'd' e termina
  - verificarlo per esercizio

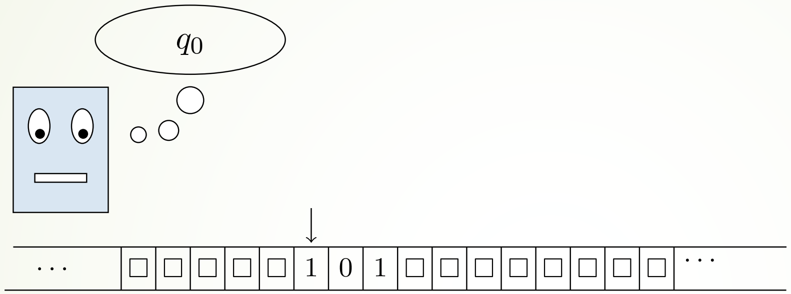
Esempio di macchina di Turing

- Vediamo ora la macchina $T_{parità}$ in azione:
  - poniamo la macchina nello stato q_0
  - scriviamo una sequenza di caratteri sul nastro – *che era precedentemente vuoto*
  - posizioniamo la testina sul carattere più a sinistra fra quelli scritti sul nastro

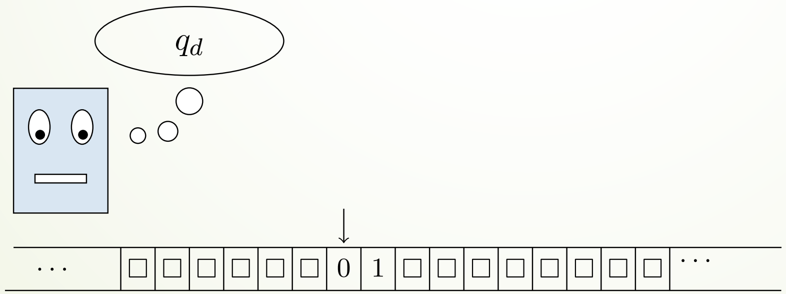


  - .. e vediamo cosa succede
- Osserviamo che P contiene la quintupla $\langle q_0, 1, \square, q_d, \text{destra} \rangle$ e che essa può essere eseguita

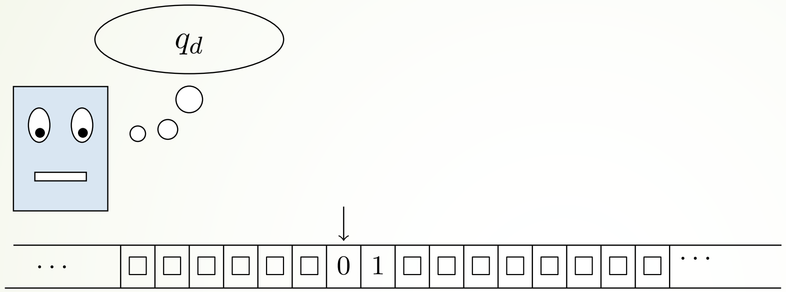
Esempio di macchina di Turing



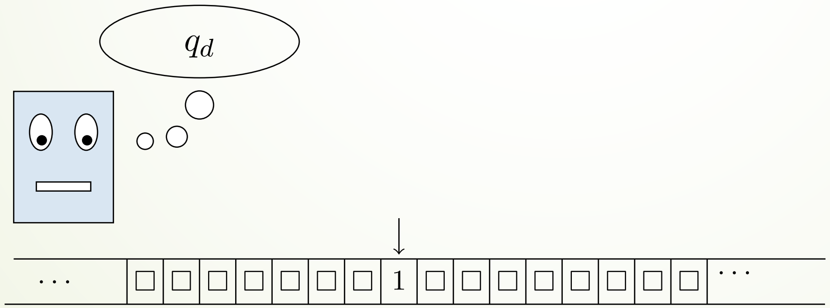
- eseguiamo, dunque, la quintupla ⟨ q_0 , 1, □, q_d , destra⟩ :



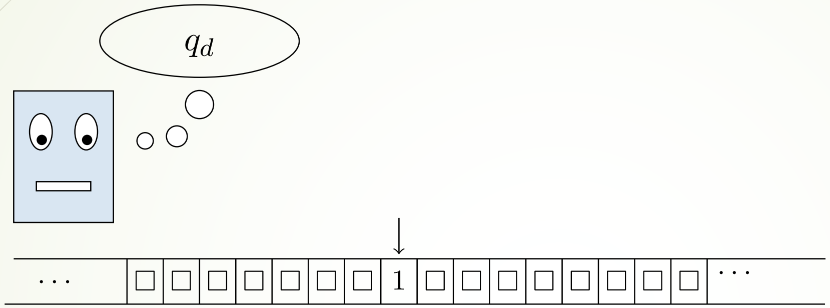
Esempio di macchina di Turing



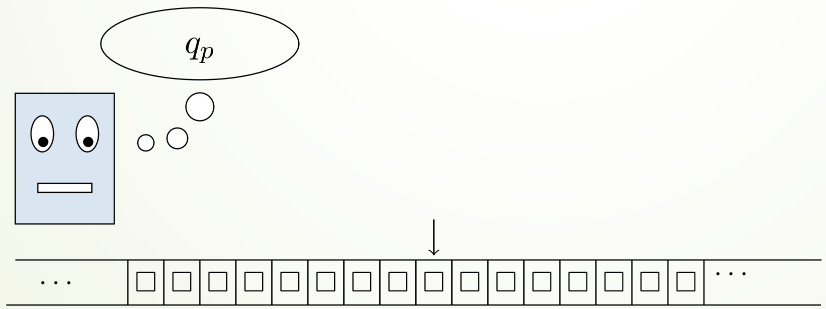
- ora possiamo eseguire la quintupla $\langle q_d$, 0, □, q_d , destra$\rangle \in$ P:



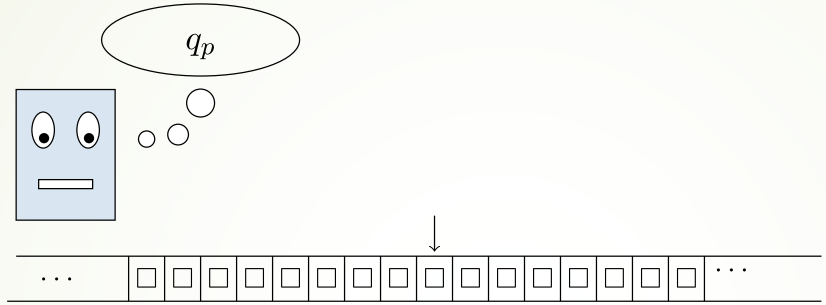
Esempio di macchina di Turing



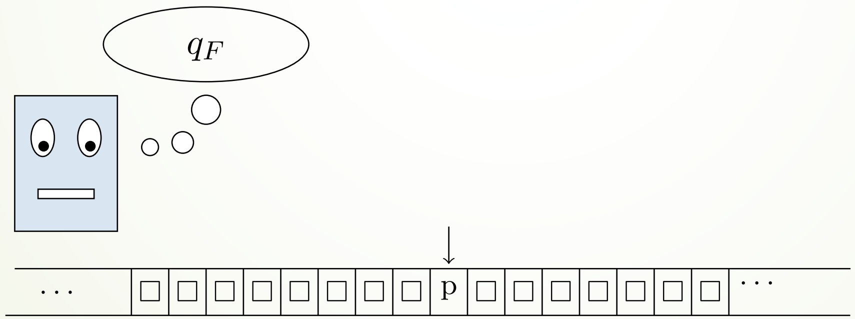
- ora possiamo eseguire la quintupla ⟨ q_d , 1, $\square$, q_p , destra⟩ ∈ P:



Esempio di macchina di Turing



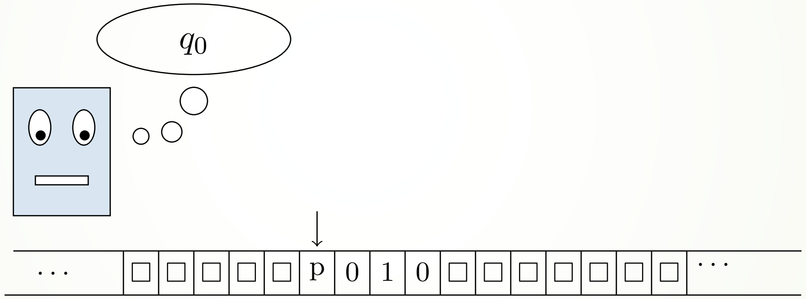
- ora possiamo eseguire la quintupla ⟨ q_p , □, p, q_F , ferma⟩ ∈ P:



- Computazione terminata!

Esempio di macchina di Turing

- Naturalmente, sul nastro di $T_{parità}$ possiamo scrivere ciò che vogliamo:
  - ad esempio, possiamo scrivere la sequenza di caratteri p010
  - e vedere cosa succede facendo partire questa nuova computazione:



- .. Ohibò! P non contiene alcuna quintupla che inizia con la coppia (q_0,p)
  - quindi, nessuna quintupla può essere eseguita
- <u>E di questo torneremo a parlare nelle prossime lezioni</u>

Definizione di macchina di Turing

- Riassumiamo: una macchina di Turing ad un nastro è completamente caratterizzata dai cinque elementi
  - Σ, ossia, un insieme _finito_ di caratteri che prende il nome di ***alfabeto***
  - Q, ossia, un insieme _finito_ di ***stati interni***
  - uno stato interno particolare (*generalmente* indicato come q_0) chiamato ***stato iniziale***
  - un sottoinsieme Q_F di Q di ***stati finali***
  - un insieme $P \subseteq Q \times \Sigma \times \Sigma \times Q \times \{\text{sinistra, fermo, destra}\}$ di ***quintuple***
    - che, sappiamo, deve essere non ambiguo
    - ossia, non contiene coppie di quintuple che hanno uguali i primi due elementi
    - ossia, in effetti, **P è una funzione**: **$P: Q \times \Sigma \rightarrow \Sigma \times Q \times \{\text{sinistra, fermo, destra}\}$**
- Quindi, possiamo dire che:

  una macchina di Turing (ad un nastro) è una quintupla $\langle \Sigma, Q. q_0, Q_F, P \rangle$
  - e dare per assodata l'esistenza di unità di controllo e nastro

Definizione di macchina di Turing

- E che dire di una macchina di Turing a più nastri? È (quasi) la stessa cosa:
- una macchina di Turing a k nastri è completamente caratterizzata da
  - un ***alfabeto*** Σ, ossia, un insieme *finito* di caratteri
  - un insieme *finito* Q di ***stati interni***
  - uno stato interno ***iniziale***
  - un sottoinsieme Q_F di Q di ***stati finali***
  - un insieme P di ***quintuple***, ove in questo caso una quintupla ha la forma
    $\langle\, q_1 , (a_1, a_2, \dots , a_k), (b_1, b_2, \dots , b_k), \; q_2 , (m_1, m_2, \dots , m_k) \,\rangle$
    - $(a_1, a_2, \dots , a_k)$ sono i caratteri che devono essere letti sui k nastri
      - a_1 è il carattere che deve essere letto sul nastro 1, a_2 è il carattere che deve essere letto sul nastro 2, ...
    - $(b_1, b_2, \dots , b_k)$ sono i caratteri che devono essere scritti sui k nastri (sovrascrivendo $(a_1, a_2, \dots , a_k)$)
      - b_1 è il carattere che deve essere scritto sul nastro 1, ...
    - $(m_1, m_2, \dots , m_k)$, sono i movimenti che devono essere eseguiti dalle k testine
      - m_1 è il movimento che deve essere compiuto dalla testina sul nastro 1, ...

Definizione di macchina di Turing

- Dunque, possiamo dire che, in generale,

  una macchina di Turing è una quintupla ⟨ Σ, Q. q_0, Q_F, P⟩

  - e sulle macchine a k nastri torneremo nelle prossime lezioni

- <u>OSSERVAZIONE</u>

  per capire quale sia il numero di nastri di una macchina di Turing ⟨ Σ, Q. q_0, Q_F, P⟩ è sufficiente osservare le quintuple contenute in P:

  - il numero di componenti del secondo elemento di una quintupla in P (che specifica ciò che deve essere letto sul/sui nastro/nastri per poter eseguire una quintupla) corrisponde al numero di nastri!
  - ad esempio, se le quintuple di una macchina di Turing hanno la forma ⟨ q_1 , a_1, … ⟩ allora si tratta di una macchina ad un nastro
  - se le quintuple di una macchina di Turing hanno la forma ⟨ q_1 , (a_1, a_2), … ⟩ allora si tratta di una macchina a due nastri
  - e così via

Definizione di **M**acchina di Turing

- Dunque, possiamo dire che, in generale,

  una macchina di Turing è una quintupla $\langle \Sigma, Q. \, q_0, Q_F, P \rangle$

- e, come dovremmo aver compreso, una macchina di Turing è la descrizione di un procedimento di calcolo
- ossia, è un *algoritmo* descritto utilizzando le regole introdotte da Alan Turing
  - in qualche modo, dunque, un programma scritto nel linguaggio progettato da Turing
- Le regole introdotte da Turing per descrivere procedimenti di calcolo costituiscono un modello di calcolo
  - tanto quanto ciascun linguaggio di programmazione, ad esempio, è un modello di calcolo
  - o tanti altri modelli ai quali accenneremo
- un modello di calcolo che prende il nome di ***Macchina di Turing***
  - repetita iuvant

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- Vediamo, ora, un esempio di macchina di Turing a due nastri
- ESERCIZIO: progettare una macchina di Turing a due nastri che, avendo sul primo nastro due numeri interi della stessa lunghezza, calcola il valore della loro somma scrivendo il risultato sul secondo nastro – ossia, si richiede di progettare una macchina di Turing che esegua la somma "in riga" di due numeri
- OSSERVAZIONE 1: poiché i due numeri devono essere scritti entrambi sul primo nastro e ciascuno di essi è una sequenza di cifre '0','1', ... , '9', è necessario utilizzare un ulteriore carattere (un *carattere separatore*) che permetta di separare i due numeri
  - scegliamo, quindi, il '+' come carattere separatore
  - e, di conseguenza, assumiamo che sul primo nastro siano scritte due sequenze di cifre '0','1', ... , '9' separate da un '+'
- OSSERVAZIONE 2: nella macchina che stiamo per progettare, i due nastri hanno funzioni (e, dunque, significati) differenti
  - il secondo nastro serve soltanto a contenere il risultato – è il ***nastro di output***
  - il primo nastro serve a contenere i dati del problema e a svolgere le azioni richieste per ottenere il risultato – è il ***nastro di input e di lavoro***

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- ESERCIZIO: progettare una macchina di Turing a due nastri che, avendo sul primo nastro due sequenze di cifre ‘0’,‘1’, ... , ‘9’ *della stessa lunghezza* separate da un ‘+’, calcola il valore della loro somma scrivendo il risultato sul secondo nastro
- IDEA DELLA SOLUZIONE:
  - a partire dallo stato iniziale e con la testina posizionata sul carattere più a sinistra sul primo nastro, ci posizioniamo sul carattere più a destra del primo numero ossia, sul carattere che si trova immediatamente a sinistra di ‘+’, senza mai muovere la testina sul secondo nastro
  - (*) poi, ricordando la cifra letta e il valore del riporto, cancelliamo quella cifra sostituendola con un ‘+’ e ci posizioniamo sul carattere più a destra del secondo numero (che si trova a sinistra del □)
  - poi, eseguiamo la somma fra la cifra del primo numero che ci stiamo ricordando e quello che stiamo leggendo: cancelliamo la cifra che stiamo leggendo sul primo nastro sostituendola con un □ e scriviamo sul secondo nastro la cifra appena calcolata muovendo, in seguito, la sua testina a sinistra e ricordando il nuovo riporto
  - poi, ricordando il valore del riporto della somma delle due cifre appena calcolata, spostiamo la testina sul primo nastro a sinistra dell’ultimo ‘+’
  - e ripetiamo da (*)

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- a partire dallo stato iniziale e con la testina posizionata sul carattere più a sinistra sul primo nastro, ci posizioniamo sul carattere più a destra del primo numero ossia, sul carattere che si trova immediatamente a sinistra di '+', senza mai muovere la testina sul secondo nastro
  - chiamiamo q_i lo stato iniziale,
  - indichiamo (in breve) con con s sinistra, con f fermo e con d destra
  - e utilizziamo le quintuple $\langle q_i , (0,\square), (0,\square), q_i , (d,f) \rangle$, … , $\langle q_i , (9,\square), (9,\square), q_i , (d,f) \rangle$,
    - che abbreviamo con: **per ogni x ∈ {0, … , 9}** $\langle q_i , (x,\square), (x,\square), q_i , (d,f) \rangle$
    - è una forma che useremo molto frequentemente
  - e la quintupla $\langle q_i , (+,\square), (+,\square), q_{is} , (s,f) \rangle$
  - osserviamo che lo stato q_i corrisponde all'azione "vai a destra finché incontri '+' "
  - quando incontriamo '+' dobbiamo smettere di muoverci a destra sul primo nastro e tornare indietro di una posizione: dobbiamo, cioè, eseguire un'azione diversa da quella regolata da q_i
  - per questo, quando sul primo nastro leggiamo '+', entriamo nello stato q_{is} al quale corrisponde l'azione "muoviti a sinistra sul primo nastro"

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- (*) poi, ricordando la cifra letta e il valore del riporto, cancelliamo quella cifra sostituendola con un '+' e ci posizioniamo sul carattere più a destra del secondo numero (che si trova a sinistra del $\square$)
  - memorizziamo la cifra letta e il valore del riporto nello stato: per ogni x ∈ {0, … , 9} , entriamo nello stato q_x^0 se leggiamo x e il riporto è 0, entriamo nello stato q_x^1 se leggiamo x e il riporto è 1
  - e utilizziamo le quintuple: per ogni x ∈ {0, … , 9} $\langle q_{is}, (x, \square), (+, \square), q_x^0, (d,f) \rangle$
    - in questo modo, si crea una sequenza di '+' via via che le cifre del primo numero vengono cancellate
  - poi, per posizionarci sul carattere più a destra del secondo numero (che si trova a sinistra del $\square$) utilizziamo le quintuple:

    per ogni x ∈ {0, … , 9} $\langle q_x^0, (x, \square), (x, \square), q_x^0, (d,f) \rangle$ e $\langle q_x^1, (x, \square), (x, \square), q_x^1, (d,f) \rangle$
  - e poi le quintuple $\langle q_x^0, (\square, \square), (\square, \square), q_{xs}^0, (s,f) \rangle$ e $\langle q_x^1, (\square, \square), (\square, \square), q_{xs}^1, (s,f) \rangle$
  - di nuovo: l'azione corrispondente a q_x^0 e a q_x^1 è ""vai a destra finché incontri $\square$"
  - quando incontriamo $\square$ dobbiamo smettere di muoverci a destra sul primo nastro e tornare indietro di una posizione: dobbiamo, cioè, eseguire un'azione diversa da quella regolata daq_x^0 e a q_x^1 e per questo, quando sul primo nastro leggiamo $\square$, entriamo in uno degli stati q_{xs}^0 o q_{xs}^1 ai quale corrisponde l'azione "muoviti a sinistra sul primo nastro"

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- poi, eseguiamo la somma fra la cifra del primo numero che ci stiamo ricordando e quello che stiamo leggendo: cancelliamo la cifra che stiamo leggendo sul primo nastro sostituendola con un $\square$, scriviamo sul secondo nastro la cifra appena calcolata muovendo, in seguito, la sua testina a sinistra , e memorizziamo il nuovo riporto
  - utilizziamo le (200) quintuple: $\langle q^0_{0s}, (0,\square), (\square,0), q^0, (f,s)\rangle$, $\langle q^1_{0s}, (0,\square), (\square,1), q^0, (f,s)\rangle$,

    $\langle q^0_{1s}, (0,\square), (\square,1), q^0, (f,s)\rangle$ e $\langle q^1_{1s}, (0,\square), (\square,2), q^0, (f,s)\rangle$

    …

    $\langle q^0_{6s}, (3,\square), (\square,9), q^0, (f,s)\rangle$ e $\langle q^1_{6s}, (3,\square), (\square,0), q^1, (f,s)\rangle$

    …

    $\langle q^0_{9s}, (9,\square), (\square,8), q^1, (f,s)\rangle$ e $\langle q^1_{9s}, (9,\square), (\square,9), q^1, (f,s)\rangle$
  - in cui q^0 e q^1 sono gli stati che corrispondono a “torno a sinistra a cercare la nuova cifra del primo addendo ricordando il riporto”
  - anche in questo caso, il valore del riporto è memorizzato nello stato

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- poi, ricordando il valore del riporto della somma delle due cifre appena calcolata, spostiamo la testina sul primo nastro a sinistra dell'ultimo '+'
  - utilizziamo le quintuple:

    per ogni x ∈ {0, … , 9} $\langle q^0, (x,\square), (x,\square), q^0, (s,f)\rangle$ e $\langle q^1, (x,\square), (x,\square), q^1, (s,f)\rangle$
  - non appena viene letto un '+' sul primo nastro, è necessario cambiare stato e continuare a muoversi a sinistra: $\langle q^0, (+,\square), (+,\square), q^0_s, (s,f)\rangle$ e $\langle q^1, (+,\square), (+,\square), q^1_s, (s,f)\rangle$
  - per fare in modo che la prima cifra incontrata al termine della sequenza di '1' venga riconosciuta
  - quando, poi, viene letta una cifra sul primo nastro, si ricomincia dal passo (*):

    per ogni x ∈ {0, … , 9} $\langle q^0_s, (x,\square), (+,\square), q^0_x, (d,f)\rangle$ e $\langle q^1_s, (x,\square), (+,\square), q^1_x, (d,f)\rangle$ **(⊙)**
  - se, invece, sul primo nastro viene letto un $\square$ allora la somma è terminata (<u>perché i due numeri hanno lo stesso numero di cifre</u>) e, dunque, viene scritto '1' sul nastro di output se il riporto è 1 e poi la macchina termina la computazione:

    $\langle q^0_s, (\square,\square), (\square,\square), q_F, (d,f)\rangle$ e $\langle q^1_s, (\square,\square), (\square,1), q_F, (d,f)\rangle$
- Osserviamo che il punto "e ripetiamo da (*)" si realizza tornando in uno degli stati q^0_x o q^1_x al passo **(⊙)**

Esercizi: progetto di macchine di Turing

- OSSERVAZIONE: la macchina che calcola la "somma in riga" di due numeri *funziona soltanto se i due numeri hanno lo stesso numero di cifre*
- ESERCIZIO (complesso): progettare una macchina di Turing <u>ad un solo nastro</u> che, avendo sul nastro due sequenze di cifre '0','1', ... , '9' separate da un '+' , scrive (in una posizione opportuna) il valore della somma dei due numeri rappresentati dalle due sequenze – ossia, si richiede di progettare una macchina di Turing che esegua la somma "in riga" di due numeri
  - questa macchina è descritta nel paragrafo 1.6 della dispensa 1 e funziona anche quando gli operandi non hanno lo stesso numero di cifre: provare a svolgere l'esercizio **senza** guardare quella macchina
- ESERCIZIO (facile): progettare una macchina di Turing ad un solo nastro che, avendo sul nastro una sequenza di 'a' e di 'b', scrive (in una posizione opportuna) il valore 1 se la sequenza è palindroma, 0 altrimenti
  - Si ricordi che una parola è palindroma se rimane identica letta da sinistra a destra o da destra a sinistra (esempio: abba)
  - L'esempio a pagina 9 mostra una macchina molto simile a quella richiesta: anche in questo caso, provare a svolgere l'esercizio **senza** guardare quella macchina
- Correggerò gli esercizi degli studenti che me li invieranno via e-mail

macchine di Turing

- Il modello di calcolo Macchina di Turing richiede che in ogni macchina l'insieme degli stati e l'alfabeto abbiano cardinalità **finita** – e lo stesso vale per il numero di nastri
- Cerchiamo di capire perché ripensando, ancora una volta, alla somma di due numeri
- Se fosse possibile avere un numero infinito di stati interni e un numero infinito di caratteri dell'alfabeto, il progetto di una macchina di Turing che esegue la "somma in riga" di due numeri (scrivendo il risultato sul secondo nastro) sarebbe banale: basterebbe porre $\Sigma = \mathbb{N} \cup \{+\}$ e $Q = \{q_x : x \in \mathbb{N}\} \cup \{q_i , q_F \}$ e utilizzare le quintuple
  - per ogni **n** $\in \mathbb{N}$ $\langle q_i, (\mathbf{n}, \square), (n, \square), q_n, (d,f) \rangle$, che legge il primo numero (scritto in una singola cella del primo nastro), entra nello stato interno corrispondente e muove la testina del primo nastro a destra per andare a cercare il secondo numero
  - per ogni n $\in \mathbb{N}$ $\langle q_n, (+, \square), (+, \square), q_n, (d,f) \rangle$, che "scavalca" il '+'
  - per ogni **n**, **m** $\in \mathbb{N}$ $\langle q_n, (\mathbf{m}, \square), (\mathbf{m}, \mathbf{h}), q_F, (d,f) \rangle$, dove **h** = **m**+**n**
  - Facile!

macchine di Turing

- Se fosse possibile avere un numero infinito di stati interni e un numero infinito di caratteri dell'alfabeto, il progetto di una macchina di Turing che esegue la "somma in riga" di due numeri (scrivendo il risultato sul secondo nastro) sarebbe banale: basterebbe porre $\Sigma = \mathbb{N}$ e $Q = \mathbb{N} \cup \{q_i , q_F \}$ e utilizzare le quintuple
  - per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\langle q_i, (n, \square), (n, \square), q_n, (d,f) \rangle$,
    per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\langle q_n, (+, \square), (+, \square), q_n, (d,f) \rangle$,
    per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ $\langle q_n, (m, \square), (m,h), q_F, (d,f) \rangle$, dove $h = m+n$
- Facile! *Troppo* facile… E, infatti, la cosa non funziona
- Il punto è che questa "macchina" non potremmo **costruirla**
  - possiamo pensare che gli stati siano realizzati, ad esempio, mediante lampadine: a ciascuno stato corrisponde una lampadina (che è accesa o spenta a seconda che la macchina si trovi o meno in quello stato)
  - e che ciascuna quintupla sia una sorta di circuito che si occupa, fra l'altro, di controllare, accendere e spegnere le lampadine
  - dovremmo, dunque, predisporre tante lampadine e tanti circuiti quanti sono i numeri naturali
  - … e mi sa che non ce la faremmo nel corso della nostra vita …

macchine di Turing

- Fuor di metafora (di lampadine e bulloni), il punto è che la forma abbreviata "per ogni x ∈ A" dobbiamo poterla scrivere <u>in forma esplicita</u>
  - ossia, anche se la notazione implicita "per ogni x ∈ A" è parecchio comoda,
  - dobbiamo poter scrivere esplicitamente ***tutti*** gli stati e ***tutte*** le quintuple che occorrono a descrivere completamente una macchina di Turing
  - e lo stesso vale per il numero di nastri
- e affinché questo sia possibile è necessario che il numero di stati, il numero di simboli dell'alfabeto, il numero di quintuple e il numero di nastri siano **finiti**
- ossia, che numero di stati, numero di simboli dell'alfabeto, numero di quintuple e numero di nastri siano scelti una volta per tutte,
  - e non di volta in volta a seconda del dato particolare sul quale vogliamo operare
  - **non** possiamo, ribadiamo, scrivere per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\langle q_i, (n, \square), (n, \square), q_n, (d,f) \rangle$,
- ossia, è necessario che numero di stati, numero di simboli dell'alfabeto, numero di quintuple e numero di nastri siano ***costanti***
  - **ossia, indipendenti dall'input**

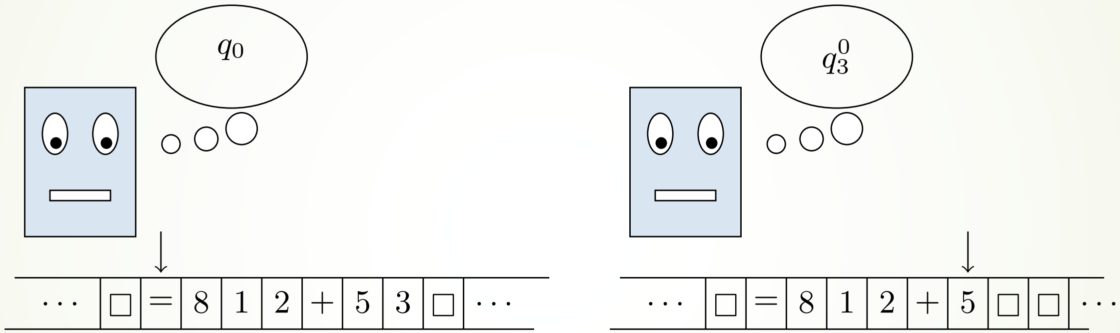
Tante definizioni per le macchine di Turing

- Nel paragrafo 2.1 della dispensa 2 vengono presentate alcune definizioni formali relative alle macchine di Turing:
  - parole
  - stati globali
  - transizioni
  - computazioni
- Queste definizioni devono essere tenute sempre presenti!!!!
- Osservate che viene utilizzata la parola *deterministica*: questo significa che P è una funzione (avremo tempo e modo di affrontarla bene e a lungo, questa questione)
- Innanzi tutto: dato un alfabeto finito Σ, una ***parola*** su Σ è una sequenza **finita** di elementi di Σ
  - ad esempio, aba è una parola sull'alfabeto $\Sigma = \{ a, b, c \}$
- L'**insieme della parole** su un alfabeto Σ si indica con $\boldsymbol{\Sigma^*}$

Stati globali

- Uno stato globale SG di una macchina di Turing è una "fotografia" della macchina ad un certo istante
- Formalmente, uno ***stato globale*** di una macchina ad un nastro T ad un certo istante
  - contiene una descrizione della porzione non blank del nastro di T, della posizione della testina (e, dunque, del carattere da essa letto) e dello stato interno
  - ed è rappresentato mediante la sequenza di caratteri (non blank) contenuti sul nastro in cui al carattere letto dalla testina è premesso lo stato interno
  - vedremo un esempio alla prossima pagina
- naturalmente, possiamo definire anche lo stato globale di una macchina a k nastri (con k costante!)
  - ma non lo facciamo formalmente
  - lo vedremo, informalmente in uno dei prossimi esempi

Esempi: stati globali



(a) (b)

(a) Lo stato globale iniziale SG_0 di una computazione della macchina che calcola la somma di due numeri vista a lezione: q_0 = 8 1 2 + 5 3

(b) uno stato globale successivo SG della stessa computazione: = 8 1 2 + q_0^3 5

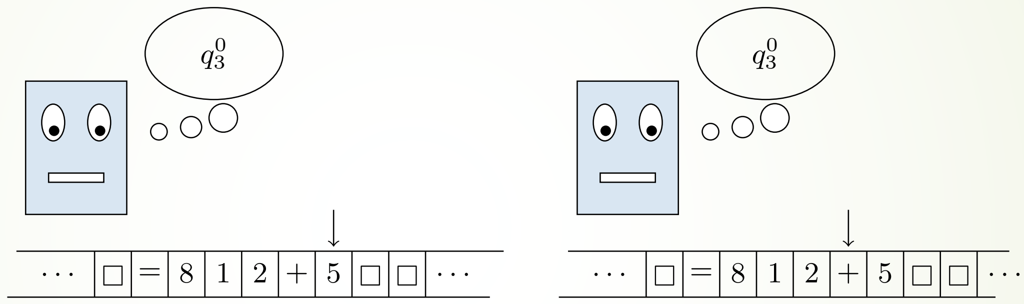
Transizioni

- Una transizione dallo stato globale SG_1 allo stato globale SG_2 avviene quando viene eseguita una quintupla che trasforma SG_1 in SG_2

- Formalmente, se T = $\langle \Sigma, Q. q_0, Q_F, P \rangle$ è una macchina di Turing ad un nastro, esiste una ***transizione*** da SG_1 a SG_2 se esiste una quintupla $\langle q, x, x', q', m \rangle \in P$ tale che
  - in SG_1 T si trova nello stato interno $q \in Q$
  - in SG_1 la testina di T sta scandendo una cella che contiene il carattere $x \in \Sigma$
  - in SG_2 la cella che in SG_1 conteneva il carattere x contiene il carattere $x' \in \Sigma$
  - in SG_2 T si trova nello stato interno $q' \in Q$
  - in SG_2 la testina di T sta scandendo la cella che si trova in posizione m rispetto a quella che stava scandendo in SG_1

- il concetto può essere facilmente esteso a macchine a più nastri
  - con qualche tecnicismo in più, che non affrontiamo

Esempi: transizioni



(a) (b)

- Un esempio di transizione dallo stato globale =812+ q_0^3 5 (in figura (a)) allo stato globale =812 q_0^3 +5 (in figura (b)) a seguito dell'esecuzione della quintupla ⟨ q_0^3 , 5, 5, q_0^3 , sinistra ⟩

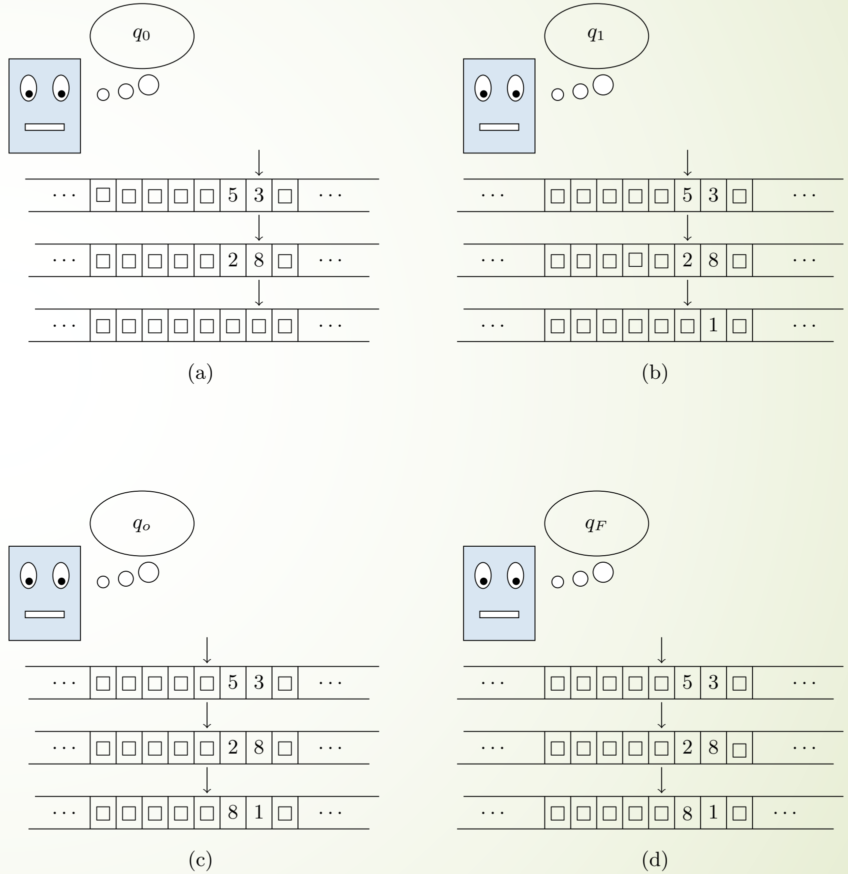
Computazione

- Informalmente, una computazione di una macchina di Turing ***deterministica*** a un nastro $T = \langle \Sigma, Q, q_0, Q_F, P \rangle$ è l'esecuzione delle quintuple di T su una sequenza di caratteri scritti sul suo nastro
  - e analogamente per le macchine a più nastri
- Formalmente: una ***computazione*** di una macchina di Turing T è una sequenza $SG_0, SG_1, SG_2, \dots, SG_h, \dots$ di stati globali di T tali che
  - SG_0 è uno ***stato globale iniziale***, ossia, uno stato globale nel quale lo stato interno è q_0 e la testina è posizionata sul carattere più a sinistra scritto sul nastro
  - per ogni $0 \leq i \leq h-1$, esiste una transizione da SG_i a SG_{i+1} oppure nessuna quintupla può essere eseguita nello stato globale da SG_i e per ogni $h \geq i+1$ SG_h non è definito
- se esiste un indice h tale che SG_h è uno stato globale dal quale non può avvenire alcuna transizione allora la computazione ***termina***
  - e questo accade quando lo stato interno nel quale T si trova in SG_h è uno stato finale oppure P non contiene una quintupla che possa essere eseguita in SG_h

Esempi: computazione

- Una computazione dallo stato globale (5,2,□)q_0(3,8,□) (a) allo stato globale q_1(5,2,□)(3,8,1) (b) allo stato globale q_0 (□,□,□)(5,2,8) (3,8,1) (c) allo stato globale q_F (□,□,□) (5,2,8)(3,8,1) (d)

- E così, abbiamo visto anche *un modo* di rappresentare uno stato globale in una macchina a più nastri



Trasduttori e Riconoscitori

- Nel paragrafo 2.2 della dispensa 2 vengono definiti due tipi di macchine di Turing.
- Le macchine di tipo ***trasduttore*** sanno calcolare il valore di una funzione qualsiasi
  - ad esempio, un trasduttore sa calcolare la funzione f(a,b)=a+b.
- Assumeremo sempre che le macchine di Turing di tipo trasduttore dispongano di un **nastro di output** sul quale scrivono il valore della funzione che hanno calcolato
- Un trasduttore ha un solo stato finale con il quale terminare la computazione: lo stato q_F

Trasduttori e Riconoscitori

- Nel paragrafo 2.2 della dispensa 2 vengono definiti due tipi di macchine di Turing.
- Le macchine di tipo ***riconoscitore*** sanno calcolare soltanto il valore di funzioni booleane
  - ossia, funzioni il cui valore è 0 oppure 1
- e non dispongono di un nastro di output.
- ***Il valore calcolato da un riconoscitore viene memorizzato nello stato interno con il quale la macchina termina la computazione***: q_A se il valore della funzione è 1, q_R se il valore della funzione è 0
  - quindi, ogni riconoscitore ha due stati finali: q_A e q_R
- Diciamo che un riconoscitore T ***accetta*** x se la computazione T(x) termina in q_A e che la macchina T ***rigetta*** x se la computazione T(x) termina in q_R

Esito di una computazione

- Sempre nel paragrafo 2.2 della dispensa 2 viene introdotto il concetto di *esito di una computazione*
- Data una macchina di Turing T ed un suo input x, l'esito della computazione T(x) è indicato con **$o_T(x)$** – informalmente è "il risultato" della computazione, la risposta che ci dà la macchina rispetto all'istanza x del problema che le abbiamo chiesto di risolvere
- Se T è una macchina di tipo ***trasduttore***, allora **$o_T(x)$ è la parola scritta da T sul nastro di output al termine della computazione** T(x) (ossia, **quando T ha raggiunto lo stato q_F**): ad esempio, se T è il trasduttore che calcola la funzione f(a,b)=a+b. allora $o_T(15,6)= 21$.
- Se T è una macchina di tipo ***riconoscitore***, allora **$o_T(x)$ è lo stato interno con il quale la macchina termina la computazione T(x)**: ad esempio, se T è la macchina che decide se una parola è palindroma, allora $o_T(abba) = q_A$ e $o_T(baaba) = q_R$.

Tanto per essere chiari

- Nel seguito di questo corso considereremo quasi sempre macchine di Turing di tipo riconoscitore
  - e questo ci semplificherà la vita, perché non dovremo occuparci del nastro di output
- Facciamo così: quando dirò "macchina di Turing" mi riferirò sempre ad una macchina di tipo riconoscitore
- Se vorrò riferirmi ad un trasduttore dirò "macchina di Turing di tipo trasduttore"